

Nachhilfestunde 6

$$f_t(x) = x \cdot e^{t-x}$$

*Zur Untersuchung einer
Exponential-Funktionen
mit typischen Schar-Aufgaben.
und partieller Integration*

Niveau: Leistungskurs Gymnasium

LEHN ANFANGEN MIT

datei Nr. 45056

Stand: 6. März. 2025

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND STUDIUM

<https://mathe-cd.de>

VORWORT

In dieser Nachhilfestunde, die in 14 Abschnitte gegliedert ist, geht es um die Funktion $f_t(x) = x \cdot e^{t-x}$. Wir besprechen ausführlich grundlegende Methoden.

Die Lösungen sind teilweise auf LK-Niveau.

Wichtige Fakten werden als Grundwissen mit **GW** gekennzeichnet.

Und das sind die besprochenen Themen bzw. Methoden:

- 1 Nullstellen von $f_t(x) = x \cdot e^{t-x}$.
- 2 Die 1. Ableitung mit der Produktregel berechnen.
- 3 Die 2. und 3. Ableitung berechnen.
Zusatz für LK: Die Formel für die n -te Ableitung ablecken.
- 4 Extrempunkte berechnen.
- 5 Wendepunkte berechnen.
- 6 Welche der Scharkurven geht durch $(2|5)$?
Erinnerung: Die Lösung der Gleichung $e^x = a$ schreibt man als $x = \ln(a)$.
- 7 Durch welche Punkte $(x|y)$ geht keine Scharkurven?
- 8 Aufstellen einer Tangentengleichung.
- 9 Die Gleichung der Wendetangente ist gesucht.
- 10 Zeigen, alle Wendetangenten gehen durch denselben Punkt S.
- 11 K_t hat eine horizontale Asymptote.
- 12 Beweis von (11) mit der **Regel von de L'Hospital**.
- 13 Fläche zwischen K_2 , x -Achse und $x = 2$ mit **partieller Integration** (LK).
- 14 Partielle Integration zu Ende rechnen.

1 Wir beginnen wie üblich mit der Berechnung der **Nullstellen** von $f_t(x) = x \cdot e^{t-x}$, $t \in \mathbb{R}$.

Die Bedingung dafür lautet: $f_t(x) = 0$ d. h. $x \cdot e^{t-x} = 0$.

Diese Gleichung stellt ein **Nullprodukt** dar, ein Produkt, das nur dann Null wird, wenn ein Faktor Null wird.

GW Du solltest wissen, dass jede Potenz von e ein positives Ergebnis hat.

$e^{t-x} > 0$ für alle x und t. Daher wird also der Faktor $e^{t-x} \neq 0$, und somit bleibt als Nullstelle nur $x_N = 0$.

2 Als nächstes berechnen wir **Ableitungen**.

Weil der Funktionsterm ein Produkt ist, bei dem beide Faktoren x enthalten, brauchst du zum Ableiten die Produktregel.

GW Für die Produktregel nennt man die beiden Faktoren $u(x)$ und $v(x)$, oder kurz einfach nur u und v:

$$f_t(x) = u \cdot v$$

Produktregel:

$$f_t'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Ganz ausführlich sieht dies dann so aus:

$$u = x \Rightarrow u' = 1$$

$$v = e^{t-x} \Rightarrow v' = -e^{t-x}$$

Einsetzung: $f_t'(x) = 1 \cdot e^{t-x} - x \cdot e^{t-x}$

In beiden Summanden steht e^{t-x} . Dies kann man rechts ausklammern:

$$f_t'(x) = (1-x) \cdot e^{t-x}$$

Ich will nun nicht alles vorrechnen.

Berechne du bitte die 2. und die 3. Ableitung.

$\Rightarrow$ 2

3 Was bisher geschah:

$$f_t(x) = x \cdot e^{t-x}$$

1. Ableitung: $f_t'(x) = (1-x) \cdot e^{t-x}$

Für die nächste Ableitung benötigt man wieder die Produktregel:

$$u = 1-x \Rightarrow u' = -1$$

$$v = e^{t-x} \Rightarrow v' = -e^{t-x}$$

2. Ableitung: $f_t''(x) = -1 \cdot e^{t-x} - (1-x) \cdot e^{t-x}$

$$f_t''(x) = (-1 - (1-x)) \cdot e^{t-x}$$

$$f_t''(x) = (-2 + x) \cdot e^{t-x}$$

oder $f_t''(x) = (x-2) \cdot e^{t-x}$

Die dritte Ableitung schreibe jetzt verkürzt auf:

$$f_t'''(x) = 1 \cdot e^{t-x} + (x-2) \cdot e^{t-x} \cdot (-1) = (1 + x - 2) \cdot e^{t-x} = (x-1) \cdot e^{t-x}$$

Hinweis für Fortgeschrittene

Wenn man sich die Ableitungen auf eine bestimmte Weise untereinander schreibt, kann man erkennen, dass es einen Bauplan gibt, nach dem sie erstellt werden können:

$$f_t(x) = (x-0) \cdot e^{t-x}$$

$$f_t'(x) = -(x-1) \cdot e^{t-x}$$

$$f_t''(x) = (x-2) \cdot e^{t-x}$$

$$f_t'''(x) = -(x-1) \cdot e^{t-x}$$

Beachtet man, dass die wechslenden Vorzeichen nicht, kommt man auf

$$f_t^{(n)}(x) = (-1)^n (x-n) \cdot e^{t-x}$$

Dabei gilt $f_t^{(0)}(x) = f_t(x)$ sein.

GW Die Vorzeichen + und - wechseln sich so ab, dass bei gerader Ableitungsnummer + steht und bei ungerader ein Minuszeichen. Dies erreicht man mit dem Faktor $(-1)^n$, denn es ist

$$(-1)^2 = +1, (-1)^3 = -1 \text{ usw.}$$

Die endgültige Ableitungsformel lautet damit: $f_t^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot (x-n) \cdot e^{t-x}$

Diese Formel kann man mit **vollständiger Induktion** beweisen.

Früher war das Stoff im Leistungskurs. Wo es heute noch gelehrt wird, weiß ich nicht.

In der Mathe-CD gibt es den Text 45021, der 15 Beispiele enthält. Beispiel 4 gleicht der hier verwendeten Aufgabe.

Berechne nun bitte die Extrempunkte von K_t .

Ich zeige dir meine 3-Schritt-Methode im Abschnitt $\Rightarrow$ **4**

4

Berechnung von Extrempunkten mit der 3-Schritt-Methode

Als Vorarbeit braucht man 2 Ableitungen, die wir in [2] schon berechnet haben:

$$f_t(x) = x \cdot e^{t-x}$$

$$f_t'(x) = (1-x) \cdot e^{t-x}$$

$$f_t''(x) = (x-2) \cdot e^{t-x}$$

1. Schritt: Notwendige Bedingung: $f_t'(x) = 0$

Mit $f_t'(x)$ berechnet man Tangentensteigungen.

Wir suchen also Punkte mit waagrechter Tangente!

$$(1-x) \cdot e^{t-x} = 0$$

Da $e^{t-x} \neq 0$ ist, folgt: $(1-x) = 0 \Leftrightarrow x_E = 1$

2. Schritt: Hinreichende Bedingung: $f_t''(1) = (1-2) \cdot e^{t+1} < 0$

Da $f_t''(-1) < 0$ ist, hat die Kurve dort ein Linkskrummungsverhalten.

also liegt ein Hochpunkt vor.

3. Schritt: y-Koordinate: $f_t(1) = 1 \cdot e^{t-1} = e^{t-1}$

Ergebnis: Die Kurve K_t hat den Hochpunkt $H_t(1, e^{t-1})$

Berechne mit der analogen Vorgehensweise den Wendepunkt.

$\Rightarrow$ [5]

5

Berechnung von Wendepunkten mit der 3-Schritt-Methode

Als Vorarbeit braucht man 3 Ableitungen, die wir in [2] schon berechnet haben:

$$f_t(x) = x \cdot e^{t-x}$$

$$f_t'(x) = (1-x) \cdot e^{t-x}$$

$$f_t''(x) = (x-2) \cdot e^{t-x}$$

$$f_t'''(x) = (x-3) \cdot e^{t-x}$$

1. Schritt: Notwendige Bedingung: $f_t''(x) = 0$ (Wir suchen Punkte mit Krümmungswechsel.)

$$(x-2) \cdot e^{t-x} = 0$$

Da $e^{t-x} \neq 0$ ist, folgt: $(x-2) = 0 \Leftrightarrow x_W = 2$

2. Schritt: Hinreichende Bedingung: $f_t'''(2) = (2-3) \cdot e^{t-2} = -e^{t-2} \neq 0$

Daher hat die Kurve K_t dort Krümmungswechsel, also liegt ein Wendepunkt vor.

3. Schritt: y-Koordinate: $f_t(2) = 2e^{t-2}$

Ergebnis: Die Kurve K_t hat den Wendepunkt $W(2 | 2e^{t-2})$

Nun zeige ich dir 5 Kurven der Schar in einem Bildchen.

Kannst du herausfinden, zu welchen Parameterwerten sie gehören?

Das ist leicht, wenn du die Schnittpunkte $H_t(1 | e^{t-1})$ betrachtest. Sie liegen alle auf der Geraden $x = 1$.

Die Wendepunkte liegen alle auf der Geraden $x = 2$.

An ihren y-Koordinaten kannst du sie erkennen.

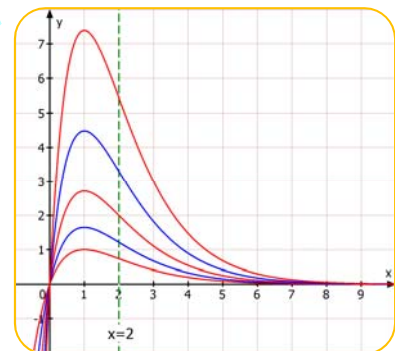
Die y-Koordinaten der Hochpunkte sind $y_H(t) = e^{t-1}$.

Die unterste dieser 5 Kurven hat $H(1 | 1)$.

Und nun fragt man sich: Welches t ist $y_H(t) = 1$, also $e^{t-1} = 1 \Leftrightarrow t-1=0 \Leftrightarrow t=1$

Nun berechne ich den Hochpunkt für $t=2$: $y_H(2) = e^{2-1} = e^1$. Das ist nun die mittlere Kurve.

Man findet so heraus, dass die Kurven zu $t \in \{1; 1,5; 2; 2,5; 3\}$ gehören.



Deine nächste Aufgabe:

Welche der Scharkurven K_t geht durch $Q(2|5)$?

$\Rightarrow$ [6]

6

Welche der Scharkurven K_t geht durch $Q(2|5)$ Die Gleichung der Scharkurven ist: $K_t: y = x \cdot e^{t-x}$ **Wenn man eine Scharkurve sucht, muss man ihren Parameterwert t bestimmen:**Man macht also die Punktprobe mit Q : $5 = 2 \cdot e^{t-2}$ Umstellen nach t : $2,5 = e^{t-2}$

GW

Die Lösung der Gleichung $e^x = a$ schreibt man als $x = \ln(a)$. $\ln(a)$ ist der natürliche Logarithmus von a .Die Lösung der Gleichung $e^{t-2} = 2,5$ ist daher

$$t - 2 = \ln(2,5) \Rightarrow t = 2 + \ln(2,5)$$

Näherungswert (Taschenrechner): $t \approx 2,92$ Folgerung: Durch $Q(2|5)$ geht die Scharkurve $K_{2,92}$ **Nun eine interessante Fortsetzung dieser Aufgabe:****Durch welchen Punkte $Q(v|v)$ gehen keine der Scharkurven?**

Rechne die Aufgabe analog zur obigen Lösung durch.

 $\Rightarrow$ 7

7

Welche der Scharkurven K_t geht durch $Q(u|v)$?Die Gleichung der Scharkurven ist: $K_t: y = x \cdot e^{t-x}$ **Wenn man eine Scharkurve sucht, muss man ihren Parameterwert t bestimmen:**Man macht also die Punktprobe mit Q: $v = u \cdot e^{t-u}$ (*)Umstellen nach t : $\frac{v}{u} = e^{t-u}$ **Dies ist aber nur möglich falls $u \neq 0$ ist (1. Fall)**

$$t - u = \ln\left(\frac{v}{u}\right)$$

$$t = \ln\left(\frac{v}{u}\right) + u$$

Die Logarithmusbedingung lautet: Das Argument muss positiv sein: $\frac{v}{u} > 0$.Das ist dann der Fall, wenn u und v **beide positiv** oder **beide negativ** sind.Durch Q geht genau also eine Scharkurve, wenn Q im 1. oder 3. Feld liegt.**Es gibt noch einen zweiten Fall: $u = 0$**

Dann folgt aus (*):

$$v = 0 \quad t = 0$$

Das bedeutet, dass nur im Falle Q auf der y-Achse eine Kurve durch Q geht,aber die Ausnahme ist die Ursprungslösung $Q(0|0)$, durch den jede Scharkurve geht,weil (*) von u unabhängig ist.**Die nächste Teilaufgabe:**Bestimme die Tangente, die K_t im Wendepunkt berührt. $\Rightarrow$ 8

8

Aufstellen einer Tangentengleichung

GW

Um eine Geradengleichung aufzustellen, braucht man (wenn sie nicht gerade parallel zur y-Achse ist), die **Punkt-Steigungs-Form**:

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

Dabei ist $P_1(x_1 | y_1)$ ein auf der Geraden liegender Punkt und m die Steigung der Geraden.

Handelt es sich speziell um eine **Tangente**, die in P_1 berührt, dann kann man die

Tangentensteigung mit der 1. Ableitung berechnen: $m_T = f'(x_1)$

Die Punkt-Steigungsform für eine Tangente sieht also so aus:

$$y - y_1 = f'(x_1) \cdot (x - x_1)$$

Da P_1 als Berührungspunkt auf der Kurve liegt, kann man auch $y_1 = f(x_1)$ verwenden.

Dann lautet die *Super-Tangenten-Form*:

$$y - f(x_1) = f'(x_1) \cdot (x - x_1)$$

Nur kannst du den Rest der Aufgabe lösen:

Stelle die Gleichung der Wertetangenten auf.

9

9

Gesucht: Gleichung der Wendetangente

Wir kennen bereits:

$$f_t(x) = x \cdot e^{t-x}$$

$$f_t'(x) = (1-x) \cdot e^{t-x}$$

und den Wendepunkt:

$$W_t(2 | 2e^{t-2})$$

Lösung:

Punkt-Steigungs-Form für Tangenten:

$$y - y_W = f'(x_W) \cdot (x - x_W)$$

Steigung der Tangente:

$$m_T = f_t'(x_W) = f_t'(2) = (1-2) \cdot e^{t-2} = -e^{t-2}$$

Einsetzen in die Gleichung:

$$y - 2e^{t-2} = -e^{t-2} \cdot (x - 2)$$

Umstellen:

$$y = -e^{t-2} \cdot x + e^{t-2} + 2e^{t-2}$$

Ergebnis:

$$y = -e^{t-2} \cdot x + 3e^{t-2}$$

Ich habe in die Zeichnung von Abschnitt 7 die Wendetangenten eingezeichnet.

Da fällt einem eine Besonderheit auf:

Alle Wendetangenten scheinen durch einen gemeinsamen Punkt zu gehen, vielleicht durch $(4 | 0)$.

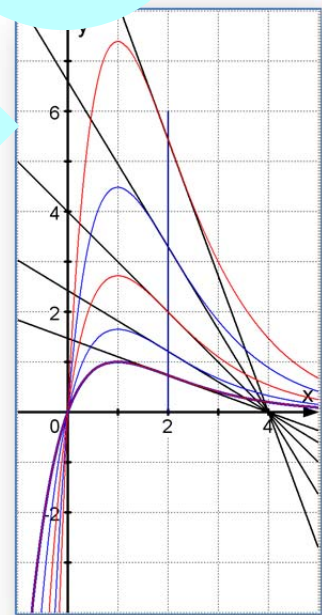
Das wollen wir nun beweisen.

Hier ist Anleitung dazu:

Nimm die Gleichung zweier Wendetangenten (für t_1 und t_2) und berechne deren Schnittpunkt.

Dann schaue meine Lösung an!

⇒ 10



10

Wir setzen voraus: Es sei $t_1 \neq t_2$. Dann sind g_1 und g_2 verschiedene Geraden:

Wendetangente g_1 : $y = -e^{t_1-2} \cdot x + 4e^{t_1-2}$

Wendetangente g_2 : $y = -e^{t_2-2} \cdot x + 4e^{t_2-2}$

Schnittgleichung: $-e^{t_1-2} \cdot x + 4e^{t_1-2} = -e^{t_2-2} \cdot x + 4e^{t_2-2}$

Ordnen: $-e^{t_1-2} \cdot x + e^{t_2-2} \cdot x = 4e^{t_2-2} - 4e^{t_1-2}$

Ausklammern: $(-e^{t_1-2} + e^{t_2-2}) \cdot x = 4(e^{t_2-2} - e^{t_1-2})$

1. Klammer vertauschen: $(e^{t_2-2} - e^{t_1-2}) \cdot x = 4(e^{t_2-2} - e^{t_1-2})$

Auf beiden Seiten steht dieselbe Klammer, die wegen $t_1 \neq t_2$ nicht Null ist.

Daher kann man durch diese Klammer teilen, d.h. man lässt sie weg.

Es folgt: $x = 4$

Setzt man diese Zahl in die Tangentengleichung ein, erhält man

$$y = -e^{t_1-2} \cdot 4 + 4e^{t_1-2} = 0$$

Ergebnis: Die Wendetangenten aller Schar Kurven schneiden sich in $S(4|0)$

11

Wenn du die Abbildung mit den Schar Kurven schaust,

erkennt du auch eine Eigenschaft der Schar Kurven K_t :

Sei n beliebig für $x \rightarrow \infty$ d.h. y -Achse beliebig gut an.

Anders formuliert:



Die x -Achse ist für $x \rightarrow \infty$ waagrechte Asymptote von K_t .

Man beweist das durch diese Rechnung:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_t(x) = 0$$

Führe diese Rechnung durch!

⇒ 12

12

Beweis, dass die x-Achse waagrechte Asymptote ist.

Zu zeigen ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_t(x) = 0$$

Ausführlich:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot (e^{t-x}) = 0$$

Das Problem, das sich hier zeigt besteht darin, dass für $x \rightarrow \infty$ der Faktor e^{t-x} gegen 0 geht.

Und daher nähert sich das Produkt $x \cdot e^{t-x}$ mit zunehmendem x dem unbestimmten Ausdruck $0 \cdot \infty$.

Daher wird man in so einem Fall die **Regel von de L'Hospital** anwenden.

Ich rechne vor:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x \cdot e^{t-x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{x}_{(I)} \underbrace{e^{t-x}}_{(II)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{x-t}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{x-t-1}} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0$$

Man schreibt den Funktionsterm in Bruchform. Dann prüft man, wie sich Zähler und Nenner für $x \rightarrow \infty$ verhalten: Der Zähler x und der Nenner e^{x-t} für $x \rightarrow \infty$ gegen $+\infty$.

Also zeigt der Bruch ein Verhalten der Form $\frac{\infty}{\infty}$.

Dann besagt diese Regel, dass unser Bruch für $u \rightarrow \infty$ denselben Grenzwert hat, wie die neue Funktion, die entsteht, das man den Zähler des Bruches und den Nenner jeweils für sich ableitet (so nicht die Quotientenregel anwenden!)

Zusatzaufgabe für LK

Die Kurve K_2 , die x-Achse und die Gerade $x = 2$ begrenzen eine Fläche.

Berechne deren Inhalt mittels **Integration**.

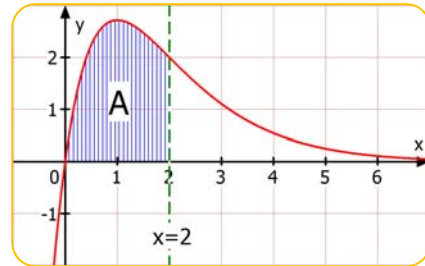
⇒ 13

13

$$K_2: y = x \cdot e^{2-x}$$

Den Flächeninhalt berechnet man mit diesem Integral:

$$A = \int_0^2 f_2(x) dx = \int_0^2 x \cdot e^{2-x} dx$$



Die zu integrierende Funktion enthält ein Produkt. Dazu gibt es keine direkte Methode.

Die Mathematiker haben sich jedoch ein Verfahren ausgedacht, mit dem man das Integral auf ein einfacheres Integral reduzieren kann. Man nennt es **Partielle Integration**.

Das wird sehr ausführlich im Text 48015 besprochen. Hier also die Methode.

Man benötigt diese Formel:

$$\int_a^b u'v dx = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b v'u dx$$

Die Gebrauchsanweisung dazu sieht so aus:

Links steht das zu berechnende Integral mit dem störenden Produkt.

Einen Faktor davon nennt man u' , den anderen v .

Der Trick besteht darin, dass man v mit u' bezeichnet, was leicht zu integrieren ist.

Oder besser gesagt: Man nennt diesen Faktor v , weil beim Ableiten zu v' einfacher wird.

Auf der rechten Seite werden dann die Faktoren u und v' benötigt.

Hier die Rechnung: gegeben: $\int_0^2 x \cdot e^{2-x} dx$

Man substituiert (ersetzt), $u' = e^{2-x}$ und $v = x$

denn es folgt: $u = -e^{2-x}$ und $v' = 1$

mit kann man die rechte Seite der Formel substituieren:

$$= \left[-e^{2-x} \cdot x \right]_0^2 - \underbrace{\int_0^2 (-e^{2-x}) dx}_S$$

Das neue Integral S auf der rechten Seite enthält das störende Produkt nicht mehr und so kann leicht integriert werden:

Hilfe:

$$\int e^{2-x} dx = \left[-e^{2-x} \right]$$

$$A = \left[-e^{2-x} \cdot x \right]_0^2 - \left[e^{2-x} \right]_0^2 = \left[(-x-1) \cdot e^{2-x} \right]_0^2$$

Merke: Mit der partiellen Integration ersetzt man ein kompliziertes Integral durch ein einfacheres.

Rechne nun zu Ende!

⇒ 14

14

Wir haben zuletzt die **Stammfunktion** berechnet: $F(x) = (-x - 1) \cdot e^{2-x}$.

Die Theorie der Flächenberechnung verlangt nun dass man die Grenze einsetzt und dann subtrahiert:

$$A = \int_0^2 f(x) dx = [F(x)]_0^2 = F(2) - F(0)$$

Das sieht dann so aus:

$$A = [(-x - 1) \cdot e^{2-x}]_0^2 = [(-2 - 1) \cdot e^{2-2}] - [(-0 - 1) \cdot e^{2-0}]$$

$$A = -3 \cdot e^0 + e^2 = e^2 - 3 \approx 3,39 \text{ (FE)}$$

Das war eine anspruchsvolle Stun

CIAC

DEMO